

УДК 681.3.06

**КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ  
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ЕКВАЦІЙНОГО РІВНЯ***О.С. Шкільняк*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.  
Тел.: (044) 259 0511  
e-mail: me.oksana@gmail.com

Пропонуються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки функціонально-екваційного рівня. Для цих логік визначаються транзитивні та темпоральні модальні системи, досліджуються їх семантичні властивості.

Composition nominative modal and temporal logics of functional-equational level are introduced in this paper. Transition and temporal modal systems are specified for such logics, and their semantic properties are investigated.

Модальні та темпоральні логіки є потужним і ефективним засобом специфікації програм, моделювання складних динамічних систем. Композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [1] синтезують можливості модальних логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Центральним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) [1]. На базі інтегрованого інтенціонально-екстенціонального підходу [2] в роботі [3] запропоноване спеціальне уточнення поняття КНМС для логік номінативних рівнів. Семантичні та синтаксичні властивості транзитивних та темпоральних КНМЛ реномінативного, кванторного та кванторно-екваційного рівнів досліджуються в [3–6], зокрема, для таких логік пропонуються числення секвенційного типу.

В даній роботі дослідження семантичних властивостей КНМЛ продовжується на функціонально-екваційному рівні. Для таких логік розглядається спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи, визначаються і досліджуються транзитивні та темпоральні КНМС функціонально-екваційного рівня.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [1, 3, 6].

**1. КНМС функціонально-екваційного рівня**

На функціонально-екваційному рівні за допомогою явно заданих (базових) функцій маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій і предикатів та можливість ототожнювати й розрізняти предметні значення, вироблені функціями. Це дає змогу ввести [1] композиції суперпозиції  $S^{\bar{v}}$  та рівності  $=$ .

Виділення спеціальних функцій деномінації (розмінування)  $'v$  для кожного  $v \in V$  дозволяє промодельовувати композицію реномінації за допомогою композиції суперпозиції: для довільної  $g \in Fn \cup Pr$  маємо  $R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(g) = S^{v_1, \dots, v_n}(g, 'x_1, \dots, 'x_n)$ .

Спеціальні предикати рівності  $=_{xy}$  можна промодельовувати за допомогою деномінаційних функцій та композиції рівності. Справді, для кожного  $d \in {}^V A$  маємо  $=_{xy}(d) = ('x, 'y)(d)$ .

Як і для випадку КНЛ квазіарних предикатів [1], до базових загальнологічних композицій КНМЛ функціонально-екваційного рівня відносимо  $\forall, \neg, \exists x, S^{\bar{v}}, =$ .

Спеціальні функції деномінації  $'v$  можна трактувати як спеціальні параметризовані за іменами 0-арні композиції.

Уточнимо поняття КНМС на функціонально-екваційному рівні.

Мова КНМЛ функціонально-екваційного рівня описується наступним чином.

Алфавіт мови складається з множини  $V$  предметних імен, множин  $Dns, Fns, Ps$  відповідно деномінаційних, функціональних, предикатних символів, а також множини символів базових композицій  $\neg, \forall, \exists x, S^{\bar{v}}, =$  і множини  $Ms$  символів базових модальних композицій. Множину  $Fns \cup Dns$  позначимо  $Fs$ .

Множини термів  $Tr$  і формул  $Fm$  формул мови КНМЛ функціонально-екваційного рівня визначаємо індуктивно.

T1. Кожний ФНС та кожний ДНС є термом. Такі терми назвемо атомарними.

T2. Нехай  $t, t_1, \dots, t_n$  – терми. Тоді  $S^{v_1, \dots, v_n} t t_1 \dots t_n$  – терм.

Ф1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо атомарними.

Ф2. Нехай  $t$  та  $s$  – терми. Тоді  $=ts$  – формула

Ф3. Нехай  $\Phi$  – формула,  $t_1, \dots, t_n$  – терми. Тоді  $S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n$  – формула.

Ф4. Нехай  $\Phi$  – формула. Тоді  $\neg \Phi$  – формула.

Ф5. Нехай  $\Phi$  та  $\Psi$  – формули. Тоді  $\neg \Phi$  та  $\vee \Phi \Psi$  – формули.

Ф6. Нехай  $\Phi$  – формула. Тоді  $\exists x \Phi$  – формула.

Ф7. Нехай  $\Phi$  – формула,  $\mathfrak{K}$  – символ базової модальної композиції. Тоді  $\mathfrak{K} \Phi$  – формула.

Для кожного  $g \in Fs \cup Ps$  множина синтетично неістотних предметних імен [1] визначаємо за допомогою тотальної функції  $\mu : Fs \cup Ps \rightarrow 2^V$ . При цьому для кожного  $x \in Dns$  покладемо  $\mu(x) = V \setminus \{x\}$ . Продовжимо таку функцію до  $\mu : Tr \cup Fr \rightarrow 2^V$  так:

$$- \mu(S^{v_1, \dots, v_n} t t_1 \dots t_n) = (\mu(t) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \cap \bigcap_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i);$$

$$- \mu(S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \cap \bigcap_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i);$$

$$- \mu(=ts) = \mu(t) \cap \mu(s);$$

$$- \mu(\neg \Phi) = \mu(\Phi);$$

$$- \mu(\vee \Phi \Psi) = \mu(\Phi) \cap \mu(\Psi);$$

$$- \mu(\exists x \Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\};$$

$$- \mu(\mathfrak{K} \Phi) = \mu(\Phi).$$

Пару  $(Fs \cup Ps, \mu)$  назвемо сигнатурою синтетичної неістотності функціонально-екваційної КНМС.

Символи модальних композицій утворюють модальну сигнатуру функціонально-екваційної КНМС.

Для уточнення  $Dns$  задамо відображення інтерпретації атомарних термів та формул на світах  $I : Fs \cup Ps \times S \rightarrow Fn \cup Pr$ . При цьому для кожних  $f \in Fs$  та  $p \in Ps$  маємо  $I(f, \alpha) \in Fn_\alpha$  та  $I(p, \alpha) \in Pr_\alpha$ ,  $I(v) = v$  для кожного  $v \in Dns$ .

Символи базових композицій  $\neg, \vee, \exists x, S^{\vec{v}}, =$  та символи базових модальних композицій інтерпретуються як відповідні композиції.

Відображення  $I$  продовжимо до  $Jm : Tr \cup Fm \times S \rightarrow Fn \cup Pr$ .

IT1)  $Jm(f, \alpha) = I(f, \alpha)$  для кожного  $f \in Fs$ ;

IT2)  $Jm(S^{v_1, \dots, v_n} t t_1 \dots t_n, \alpha) = S^{v_1, \dots, v_n} (Jm(t, \alpha), Jm(t_1, \alpha), \dots, Jm(t_n, \alpha))$ .

IF1)  $Jm(p, \alpha) = I(p, \alpha)$  для кожного  $p \in Ps$ ;

IF2)  $J(=ts, \alpha) = (J(t, \alpha), J(s, \alpha))$ .

IF3)  $Jm(S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n, \alpha) = S^{v_1, \dots, v_n} (Jm(\Phi, \alpha), Jm(t_1, \alpha), \dots, Jm(t_n, \alpha))$ .

IF4)  $Jm(\neg \Phi, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$ ;

IF5)  $Jm(\vee \Phi \Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$ ;

IF6)  $Jm(\exists x \Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi, \alpha)(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi, \alpha)(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$

IF7) Значення  $Jm(\mathfrak{K} \Phi, \alpha)(d)$  визначається значеннями  $Jm(\Phi, \delta)(d)$  для певних станів  $\delta$  таких, що  $\alpha$  та ці  $\delta$  перебувають у відповідних пов'язаних із  $\mathfrak{K}$  відношеннях з  $R$ .

При цьому виконуються умови  $Jm(t, \alpha) \in Fn_\alpha$  та  $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$ .

Предикат  $Jm(t, \alpha)$ , який є значенням терма  $t$  у стані  $\alpha$ , будемо позначати  $t_\alpha$ .

Предикат  $Jm(\Phi, \alpha)$ , який є значенням формули  $\Phi$  у стані  $\alpha$ , будемо позначати  $\Phi_\alpha$ .

Таким чином, поняття КНМС функціонально-екваційного рівня можна уточнити як об'єкт вигляду  $M = ((S, R, Fn \cup Pr, C), Tr \cup Fm, Jm)$ .

Поняття істинної в стані  $\alpha$ , істинної в КНМС формули та всюди істинної формули для КНМС функціонально-екваційного рівня аналогічні відповідним визначенням для КНМС кванторного та кванторно-екваційного рівнів [3, 6].

Семантичні властивості КНМС функціонально-екваційного рівня, не пов'язані з модальностями, успадковують властивості КНМС кванторного та кванторно-екваційного рівнів.

До властивостей власне функціонально-екваційного рівня належать в першу чергу загальнологічні властивості, притаманні як КНМЛ, так і КНЛ квазіарних предикатів. Це пов'язані з суперпозиціями властивості  $ZN\Phi, Z\Phi, S\neg, S\vee, SS\Phi, S\exists, S\exists\exists$  та пов'язані з суперпозиціями й рівністю властивості  $ZT, DD, DS, ZNT, SST, SE$  (див. [1]). До таких властивостей належать також специфічні властивості рівності:

Rf) рефлексивність:  $\models t = t$ ;

Sm) симетричність:  $\models s = t \leftrightarrow t = s$ ;

Tr) транзитивність:  $\models s = t \rightarrow t = h \rightarrow s = h$ ;

Зазначені властивості справджуються для кожного конкретного стану кожної КНМС функціонально-екваційного рівня,

Терм нормальний [1], якщо всі його символи суперпозиції застосовані тільки до ФНС, згорнуті неістотні імена й виконані спрощення на основі  $SST, ZNT, ZT, DS, DD$ .

Атомарні формули й формули вигляду  $S^{\bar{v}}(p, \bar{t})$  чи  $t = s$  називають [1] *елементарними*.

Елементарна формула примітивна [1], якщо вона атомарна, або в її символах суперпозиції згорнуті неістотні імена та всі її терми нормальні.

Будемо писати  $\sigma \angle \rho$ , якщо терм  $\sigma$  є підтермом терма чи формули  $\rho$ .

Аналогічно пишемо  $\xi \angle \Phi$ , якщо формула  $\xi$  є підформулою формули  $\Phi$ .

Нехай  $t$  та  $s$  – нормальні [1] терми, причому  $\models t = s$ . Нехай невірно  $t \angle s$  та невірно  $s \angle t$ .

Примітивні формули  $\phi$  та  $\xi$  назовемо  $t=s$ -еквівалентними, якщо при заміні в них усіх входжень  $t$  та  $s$  на один і той же ФНС отримаємо однакові формули.

Неформально це означає, що формулу  $\xi$  можна отримати із формули  $\phi$  замінами деяких входжень терма  $t$  на  $s$  і навпаки.

Якщо формули  $\phi$  та  $\xi$   $t=s$ -еквівалентні, то будемо говорити, що  $\phi \in t=s$ -варіантою формули  $\xi$ , а  $\xi$  –  $t=s$ -варіантою формули  $\phi$ .

Якщо  $\models t = s$  та  $t \angle s$ , то визначення  $t=s$ -еквівалентних примітивних формул треба модифікувати:  $\phi$  та  $\xi$   $t=s$ -еквівалентні, якщо при заміні в них усіх входжень  $s$  та  $t$  (можливо, за декілька кроків) отримаємо одну і ту ж формулу  $\psi$ .

Неважко переконатись, що справджується наступне твердження, яке фактично успадковане від КНЛ квазіарних предикатів:

**Теорема 1.** Нехай  $\alpha \models t = s$ , нехай примітивні формули  $\phi$  та  $\xi$   $t=s$ -еквівалентні. Тоді  $\alpha \models t = s \rightarrow (\phi \leftrightarrow \xi)$ .

Звідси як наслідок отримуємо наступну властивість:

$\text{EPf} \models t = s \rightarrow (\phi \leftrightarrow \xi)$  при умові, що примітивні формули  $\phi$  та  $\xi$  –  $t=s$ -еквівалентні.

## 2. ТМС функціонально-екваційного рівня

Для транзитивних модальних систем (ТМС) [1] множина  $\mathbf{R}$  відношень на станах світу складається з відношень вигляду  $\mathbf{R} \subseteq S \times S$ .

ТМС із єдиним бінарним відношенням на станах  $\triangleright$  та базовими модальними композиціями  $\Box$  і  $\Diamond$  називають [1] загальними ТМС.

ТМС із єдиним бінарним відношенням  $\triangleright$  та базовими модальними композиціями  $\Box_{\uparrow}$ ,  $\Box_{\downarrow}$ ,  $\Diamond_{\uparrow}$  і  $\Diamond_{\downarrow}$  називають [1] темпоральними КНМС, а також темпоральними ТМС (ТмМС).

КНМС, в яких із  $\Phi_{\delta}(d) \downarrow$  випливає  $d \in {}^V A_{\delta}$ , називають [6] КНМС із сильною умовою визначеності на станах. В таких КНМС при  $d \notin {}^V A_{\delta}$  маємо  $\Phi_{\delta}(d) \uparrow$ .

ТМС із сильною умовою визначеності називають  $St$ -ТМС.

У випадку  $St$ -ТМС модальні композиції не зберігають еквітонність, проте зберігають слабку еквітонність (див. [6]).

Ослабимо вимогу  $\Phi_{\delta}(d) \uparrow$  при  $d \notin {}^V A_{\delta}$ . Будемо тепер вважати, що умова  $d \in {}^V A_{\delta}$  не є обов'язковою для  $\Phi_{\delta}(d) \downarrow$ . Для цього при  $d \notin {}^V A_{\delta}$  задаємо  $\Phi_{\delta}(d) = \Phi_{\delta}(d \cap {}^V A_{\delta})$ .

ТМС із такою загальною умовою визначеності називають [6]  $Gn$ -ТМС.

Множину вигляду  $d \cap {}^V A_{\alpha}$ , де  $d \in {}^V A$ , позначаємо  $d_{\alpha}$ .

Для  $Gn$ -ТМС справджується [6]

**Теорема 2. 1.** У випадку загальних  $Gn$ -ТМС композиція  $\Box$  зберігає еквітонність.

2. У випадку темпоральних  $Gn$ -ТМС композиції  $\Box_{\uparrow}$  та  $\Box_{\downarrow}$  зберігають еквітонність.

Таким чином, базові композиції загальних  $Gn$ -ТМС та темпоральних  $Gn$ -ТМС зберігають еквітонність.

Розглянемо властивості функціонально-екваційних  $Gn$ -ТМС, пов'язані з модальними композиціями та рівністю.

**Твердження 1.** Формула  $\Box t = s \rightarrow \Box S^{x, \bar{v}}(\tau, t, \bar{t}) = S^{x, \bar{v}}(\tau, s, \bar{t})$  всюди істинна.

Припустимо супротивне: для деяких  $\alpha \in S$  та  $d \in {}^V A_{\alpha}$  маємо  $(\Box t = s)_{\alpha}(d) = T$  та  $(\Box S^{x, \bar{v}}(\tau, t, \bar{t}) = S^{x, \bar{v}}(\tau, s, \bar{t}))_{\alpha}(d) = F$ . Друга умова означає: для деякого  $\beta \in S$  такого, що  $\alpha \triangleright \beta$ , маємо  $(S^{x, \bar{v}}(\tau, t, \bar{t}) = S^{x, \bar{v}}(\tau, s, \bar{t}))_{\beta}(d_{\beta}) = F$ . Тоді отримуємо  $(S^{x, \bar{v}}(\tau, t, \bar{t}))_{\beta}(d_{\beta}) \downarrow = a$ ,  $(S^{x, \bar{v}}(\tau, s, \bar{t}))_{\beta}(d_{\beta}) \downarrow = b$  для деяких  $a, b \in A_{\beta}$ :  $a \neq b$ . Звідси  $\tau_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto t_{\beta}(d_{\beta})) = a$ ,  $\tau_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto s_{\beta}(d_{\beta})) = b$  для деяких  $a \neq b$ . Але  $(\Box t = s)_{\alpha}(d) = T$  означає  $(t = s)_{\beta}(d_{\beta}) = T$  для такого  $\beta$ , звідки  $t_{\beta}(d_{\beta}) \downarrow = s_{\beta}(d_{\beta}) \downarrow = c \in A_{\beta}$ . Тоді  $\tau_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto t_{\beta}(d_{\beta})) = \tau_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto c) = \tau_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto s_{\beta}(d_{\beta}))$  – суперечність.

**Твердження 2.** Формула  $\Box t = s \rightarrow \Box (S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \leftrightarrow S^{x, \bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}))$  всюди істинна.

Припустимо супротивне: для деяких  $\alpha \in S$  та  $d \in {}^V A_{\alpha}$  маємо  $(\Box t = s)_{\alpha}(d) = T$  та  $(\Box (S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \leftrightarrow S^{x, \bar{v}}(\Phi, s, \bar{t})))_{\alpha}(d) = F$ . Друга умова означає, що для деякого  $\beta \in S$  такого, що  $\alpha \triangleright \beta$ , маємо  $(S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \leftrightarrow S^{x, \bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}))_{\beta}(d_{\beta}) = F$ . Звідси  $(S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}))_{\beta}(d_{\beta}) \downarrow \neq (S^{x, \bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}))_{\beta}(d_{\beta}) \downarrow$ , звідки отримуємо  $\Phi_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto t_{\beta}(d_{\beta})) = a$ ,  $\Phi_{\beta}(d_{\beta} \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_{\beta}(d_{\beta}) \nabla x \mapsto s_{\beta}(d_{\beta})) = b$  для  $a, b \in Bool$  таких, що  $a \neq b$ .

Але  $(\Box t = s)_\alpha(d) = T$  означає  $(t = s)_\beta(d_\beta) = T$  для такого  $\beta$ , звідки маємо  $t_\beta(d_\beta) \downarrow = s_\beta(d_\beta) \downarrow = c \in A_\beta$ . Тоді  $\Phi_\beta(d_\beta \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_\beta(d_\beta) \nabla x \mapsto t_\beta(d_\beta)) = \Phi_\beta(d_\beta \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_\beta(d_\beta) \nabla x \mapsto c) = \Phi_\beta(d_\beta \nabla \bar{v} \mapsto (\bar{t})_\beta(d_\beta) \nabla x \mapsto s_\beta(d_\beta))$  – суперечність.

Семантичні властивості ТМС функціонально-екваційного рівня відрізняються від семантичних властивостей ТМС кванторного та кванторного-екваційного рівнів.

**Приклад 1.** Формула  $t = s \rightarrow \Box t = s$  не є всюди істинною.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду  $t = s \rightarrow \Box t = s$ . Нехай  $S = \{\alpha, \beta\}$ , де  $A_\alpha = A_\beta = \{0, 1\}$ . Нехай  $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$ . Візьмемо ФС + та  $\oplus$ , для яких неістотні всі імена, окрім  $x$  та  $y$ . Визначимо  $+_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 0$ ,  $\oplus_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 0$ ,  $+_\beta([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 0$ ,  $\oplus_\beta([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 1$ . Для всіх інших  $d \in \{0, 1\}^{\{x, y\}}$  значення  $+_\alpha(d)$ ,  $+_\beta(d)$ ,  $\oplus_\alpha(d)$ ,  $\oplus_\beta(d)$  покладемо рівним 0. Тоді  $(+ = \oplus)_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = T$ .  $(+ = \oplus)_\beta([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = F$ , звідки  $(+ = \oplus \rightarrow \Box + = \oplus)_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = F$ , тому  $\alpha \not\models + = \oplus \rightarrow \Box + = \oplus$ .

**Приклад 2.** Формула  $\Box t = s \rightarrow t = s$  не є всюди істинною.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду  $\Box t = s \rightarrow t = s$ . Нехай  $S = \{\alpha, \beta\}$ , де  $A_\alpha = A_\beta = \{0, 1\}$ . Нехай  $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$ . Візьмемо ФС + та  $\oplus$ , для яких неістотні всі імена, окрім  $x$  та  $y$ . Визначимо  $+_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 0$ ,  $\oplus_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 1$ ,  $+_\beta([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 0$ ,  $\oplus_\beta([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = 0$ . Для всіх інших  $d \in \{0, 1\}^{\{x, y\}}$  значення  $+_\alpha(d)$ ,  $+_\beta(d)$ ,  $\oplus_\alpha(d)$ ,  $\oplus_\beta(d)$  покладемо рівним 0. Тоді  $(+ = \oplus)_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = F$ .  $(+ = \oplus)_\beta([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = T$ , звідки  $(\Box + = \oplus \rightarrow + = \oplus)_\alpha([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = F$ , тому  $\alpha \not\models \Box + = \oplus \rightarrow + = \oplus$ .

**Приклад 3.** Формули вигляду  $\Box S^x(\Phi, \bar{t}) \rightarrow S^x(\Box\Phi, \bar{t})$  і  $S^x(\Box\Phi, \bar{t}) \rightarrow \Box S^x(\Phi, \bar{t})$  не є всюди істинними.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула  $\Box S^x(p, f) \rightarrow S^x(\Box p, f)$ .

Нехай  $S = \{\alpha, \beta\}$ , де  $A_\alpha = A_\beta = \{0, 1\}$ ,  $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$ . Нехай для  $p$  та  $f$  неістотні усі імена, окрім  $x$ . Задамо  $f_\alpha([x \mapsto 0]) = 0$ ,  $f_\beta([x \mapsto 0]) = 1$ ,  $p_\beta([x \mapsto 1]) = T$ ,  $p_\beta([x \mapsto 0]) = F$ . Для всіх інших  $d \in \{0, 1\}^{\{x\}}$  значення  $f_\alpha(d)$ ,  $f_\beta(d)$ ,  $p_\alpha(d)$ ,  $p_\beta(d)$  задамо довільним чином. Тоді  $(S^x(p, f))_\beta([x \mapsto 0]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\beta([x \mapsto 0])]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto 1]) = p_\beta([x \mapsto 1]) = T$ , звідки маємо  $(\Box S^x(p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = T$ . Проте  $p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\alpha([x \mapsto 0])]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto 0]) = p_\beta([x \mapsto 0]) = F$ , тому  $\Box p_\alpha([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\alpha([x \mapsto 0])]) = F$ , звідки  $(S^x(\Box p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = F$ . Отже,  $(\Box S^x(p, f) \rightarrow S^x(\Box p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = F$ .

Тепер будуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула  $S^x(\Box p, f) \rightarrow \Box S^x(p, f)$ .

Нехай  $S = \{\alpha, \beta\}$ , де  $A_\alpha = A_\beta = \{0, 1\}$ ,  $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$ . Нехай для  $p$  та  $f$  неістотні всі імена, окрім  $x$ . Задамо  $f_\alpha([x \mapsto 0]) = 0$ ,  $f_\beta([x \mapsto 0]) = 1$ ,  $p_\beta([x \mapsto 1]) = F$ ,  $p_\beta([x \mapsto 0]) = T$ . Для всіх інших  $d \in \{0, 1\}^{\{x\}}$  значення  $f_\alpha(d)$ ,  $f_\beta(d)$ ,  $p_\alpha(d)$ ,  $p_\beta(d)$  задамо довільним чином. Тоді  $(S^x(p, f))_\beta([x \mapsto 0]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\beta([x \mapsto 0])]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto 1]) = p_\beta([x \mapsto 1]) = F$ , звідки маємо  $(\Box S^x(p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = F$ . Проте  $p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\alpha([x \mapsto 0])]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto 0]) = p_\beta([x \mapsto 0]) = T$ , тому  $\Box p_\alpha([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\alpha([x \mapsto 0])]) = T$ , звідки  $(S^x(\Box p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = T$ . Отже,  $(S^x(\Box p, f) \rightarrow \Box S^x(p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = F$ .

Таким чином, для ТМС функціонально-екваційного рівня вже не можна проносити символи суперпозиції через символи модальних композицій. Це пов'язане із тим фактом, що один і той же терм, навіть один і той же функціональний символ, на одних і тих же даних може по-різному інтерпретуватись в різних станах. Це не так для деномінаційних символів, які мають загальнологічний статус та інтерпретуються однаково в різних станах, в різних модальних системах. Тому символи реномінації можна [3] проносити через символи модальних композицій, а символи суперпозиції – не можна.

Зауважимо, що подібні ефекти, пов'язані з підстановками термів замість вільних входжень предметних імен, проявляються і для традиційних модальних логік при побудові прикладів вигляду  $\Box\Phi_x[t]$  для формул вигляду  $\forall x\Box\Phi(x)$ . Неважко побудувати традиційну реляційну модель, в якій спростовується формула вигляду  $\forall x\Box\Phi(x) \rightarrow \Box\Phi_x[t]$ .

**Приклад 4.** Нехай  $S = \{\alpha, \beta\}$ , де  $A_\alpha = \{0\}$ ,  $A_\beta = \{0, 1\}$ ,  $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$ . Нехай  $p$  та  $f$  1-арні. Задамо  $f_\alpha(0) = 0$ ,  $f_\beta(0) = 1$ ,  $p_\alpha(0) = T$ ,  $p_\beta(0) = T$ ,  $p_\beta(1) = F$ . Згідно  $p_\beta(0) = T$  маємо  $\Box p_\alpha(0) = T$ , звідки, враховуючи  $A_\alpha = \{0\}$ , маємо  $(\forall x\Box p(x))_\alpha = T$ . Проте  $(p_x[f])_\beta(0) = p_\beta(f_\beta(0)) = p_\beta(1) = F$ , звідки  $(\Box p_x[f])_\alpha(0) = F$ , тому  $(\forall x\Box p(x) \rightarrow \Box p_x[f])_\alpha(0) = F$ . Отже,  $\alpha \not\models \forall x\Box p(x) \rightarrow \Box p_x[f]$ .

Аналогічно будуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду  $\forall x\Box\Phi \rightarrow \Box S^x(\Phi, t)$ .

**Приклад 5.** Нехай  $S = \{\alpha, \beta\}$ , де  $A_\alpha = \{0\}$ ,  $A_\beta = \{0, 1\}$ ,  $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$ . Нехай для  $p$  та  $f$  неістотні всі імена, окрім  $x$ . Задамо  $f_\alpha([x \mapsto 0]) = 0$ ,  $f_\beta([x \mapsto 0]) = 1$ ,  $f_\beta([x \mapsto 1]) = 1$ ,  $p_\alpha([x \mapsto 0]) = T$ ,  $p_\beta([x \mapsto 0]) = T$ ,  $p_\beta([x \mapsto 1]) = F$ . Згідно  $p_\beta([x \mapsto 0]) = T$  маємо  $\Box p_\alpha([x \mapsto 0]) = T$ , звідки, враховуючи  $A_\alpha = \{0\}$ , маємо  $(\forall x\Box p)_\alpha([x \mapsto 0]) = T$ . тому  $\alpha \models \forall x\Box p$ . Проте  $(S^x(p, f))_\beta([x \mapsto 0]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto f_\beta([x \mapsto 0])]) = p_\beta([x \mapsto 0 \nabla x \mapsto 1]) = p_\beta([x \mapsto 1]) = F$ , звідки  $(\Box S^x(p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = F$ , тому  $\alpha \not\models \Box S^x(p, t)$  та  $(\forall x\Box p \rightarrow \Box S^x(p, f))_\alpha([x \mapsto 0]) = F$ . Отримали  $\alpha \models \forall x\Box p$ ,  $\alpha \not\models \Box S^x(p, t)$ ,  $\alpha \not\models \forall x\Box p \rightarrow \Box S^x(p, t)$ .

Таким чином, в загальному випадку виникають труднощі при побудові прикладів формул вигляду  $\forall x\Box\Phi$  (а також  $\exists x\Box\Phi$ ). Очевидним чином можна отримати приклади вигляду  $S^x(\Box\Phi, t)$ , але подальше пронесення  $\Box$  через суперпозицію некоректне. Як бачимо, не допомагає і “безпосередня” побудова прикладів  $\Box S^x(\Phi, t)$  для  $\forall x\Box\Phi$ .

Зазначену неприємну особливість ТМС функціонально-екваційного рівня можна обійти ціною введення додаткової умови збереження значень функціональних символів при русі за станами. Такі ТМС назовемо функціонально стабільними.

ТМС  $M$  назовемо функціонально стабільною, якщо для всіх  $\alpha \in S$ , для всіх  $\beta: \alpha \triangleright \beta$ , для всіх  $f \in Fns$ , для всіх  $d \in {}^V A_\alpha$  з умови  $f_\alpha(d) \downarrow$  та  $f_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow$  випливає  $f_\alpha(d) = f_\beta(d \cap {}^V A_\beta)$ .

Покажемо, що умова функціональної стабільності ТМС продовжується на терми.

**Теорема 3.** Якщо ТМС  $M$  функціонально стабільна, то для всіх  $\alpha \in S$ , для всіх  $\beta: \alpha \triangleright \beta$ , для всіх  $\tau \in Tr$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  з умови  $\tau_\alpha(d) \downarrow$  та  $\tau_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow$  випливає  $\tau_\alpha(d) = \tau_\beta(d \cap {}^V A_\beta)$ .

Доводимо індукцією за побудовою терма  $\tau$ .

Для ДНС твердження теореми очевидне.

Для ФНС твердження теореми – це умова функціональної стабільності.

Нехай терм  $t$  має вигляд  $S^x(t, s)$ . Для загального випадку, коли терм  $\tau$  має вигляд  $S^{x_1, \dots, x_n}(t, s_1, \dots, s_n)$  доведення аналогічне.

Припустимо супротивне: нехай для деяких станів  $\alpha, \beta$  таких, що  $\alpha \triangleright \beta$ , для деякого  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $S^x(t, s)_\alpha(d) = a$  та  $S^x(t, s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = b$ , причому  $a \neq b$ .

1. Нехай  $s_\alpha(d) \uparrow$ . Тоді  $S^x(t, s)_\alpha(d) = t_\alpha(d \nabla x \rightarrow s_\alpha(d)) = t_\alpha(d \parallel_{-x}) = a$ .

1.1. Якщо  $s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \uparrow$ , то

$$S^x(t, s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow s_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = t_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = t_\beta((d \parallel_{-x}) \cap {}^V A_\beta) = b.$$

Але  $t_\alpha(d \parallel_{-x}) = a$ , тому згідно припущення індукції для  $t$  тоді необхідно  $a = b$  – суперечність.

1.2. Якщо  $s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow = c$ , то

$$S^x(t, s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow c) = t_\beta((d \nabla x \rightarrow c) \cap {}^V A_\beta) = b$$

Із  $t_\alpha(d \parallel_{-x}) = a$  за еквітонністю маємо  $t_\alpha(d \nabla x \rightarrow c) = a$ . Згідно припущення індукції для  $t$  тоді необхідно  $a = b$  – суперечність.

2. Нехай  $s_\alpha(d) \downarrow = e$ . Тоді  $S^x(t, s)_\alpha(d) = t_\alpha(d \nabla x \rightarrow s_\alpha(d)) = t_\alpha(d \nabla x \rightarrow e) = a$ .

2.1. Якщо  $s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \uparrow$ , то

$$S^x(t, s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow s_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = t_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = t_\beta((d \parallel_{-x}) \cap {}^V A_\beta) = b.$$

Але  $(d \parallel_{-x}) \cap {}^V A_\beta \subseteq (d \nabla x \rightarrow e) \cap {}^V A_\beta$ , тому за еквітонністю  $t_\beta((d \nabla x \rightarrow e) \cap {}^V A_\beta) = b$ . Але  $t_\alpha(d \nabla x \rightarrow e) = a$ , тому згідно припущення індукції для  $t$  тоді необхідно  $a = b$  – суперечність.

2.2. Якщо  $s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow = c$ , то згідно припущення індукції для  $s$  із  $s_\alpha(d) = e$  отримуємо  $c = e$ . Звідси

$$S^x(t, s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow e) = t_\beta((d \nabla x \rightarrow e) \cap {}^V A_\beta) = b$$

Але  $t_\alpha(d \nabla x \rightarrow e) = a$ , тому згідно припущення індукції для  $t$  тоді необхідно  $a = b$  – суперечність.

**Теорема 4.** Для кожної функціонально стабільної ТМС  $M$  маємо  $M \models \Box S^x(\Phi, \bar{t}) \rightarrow S^x(\Box \Phi, \bar{t})$  та  $M \models S^x(\Box \Phi, \bar{t}) \rightarrow \Box S^x(\Phi, \bar{t})$ .

Доводимо для формул вигляду  $S^x(\Phi, t)$ . Для загального випадку (див. формулювання теореми) доведення аналогічне.

1. Показуємо  $M \models \Box S^x(\Phi, t) \rightarrow S^x(\Box \Phi, t)$ .

Припустимо супротивне: для деяких стану  $\alpha$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $(\Box S^x(\Phi, t) \rightarrow S^x(\Box \Phi, t))_\alpha(d) = F$ . Звідси  $(\Box S^x(\Phi, t))_\alpha(d) = T$  та  $(S^x(\Box \Phi, t))_\alpha(d) = F$ .

Із  $(S^x(\Box \Phi, t))_\alpha(d) = F$  маємо  $\Box \Phi_\alpha(d \nabla x \rightarrow t_\alpha(d)) = F$ , звідки для деякого  $\beta$  такого, що  $\alpha \triangleright \beta$ , маємо  $\Phi_\beta((d \nabla x \rightarrow t_\alpha(d)) \cap {}^V A_\beta) = F$ . Із  $(\Box S^x(\Phi, t))_\alpha(d) = T$  для такого  $\beta$  тоді  $S^x(\Phi, t)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = T$ , звідки  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow t_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = T$ .

1-1. Нехай  $t_\alpha(d) \uparrow$ . Тоді  $\Phi_\beta((d \nabla x \rightarrow t_\alpha(d)) \cap {}^V A_\beta) = F$  дає  $\Phi_\beta((d \parallel_{-x}) \cap {}^V A_\beta) = F$ , звідки  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = F$ . При  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \uparrow$  тоді  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow t_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = T$  дає  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = T$  – суперечність. При  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow = c$  із  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow t_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = T$  маємо  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow c) = T$ , але згідно  $(d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x} \subseteq (d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow c$  за еквітонністю знову маємо суперечність із  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = F$ .

1-2. Нехай  $t_\alpha(d) \downarrow = e$ . Із  $\Phi_\beta((d \nabla x \rightarrow t_\alpha(d)) \cap {}^V A_\beta) = F$  тоді  $\Phi_\beta((d \nabla x \rightarrow e) \cap {}^V A_\beta) = F \Rightarrow \Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow e) = F$ . При  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \uparrow$  тоді  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow t_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = T$  дає  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = T$ , звідки згідно  $(d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x} \subseteq (d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow e$  за еквітонністю маємо суперечність із  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \parallel_{-x}) = F$ . При  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow$  згідно припущення індукції для  $t$  маємо  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\alpha(d) = e$ , тому  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow t_\beta(d \cap {}^V A_\beta)) = T$  дає  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow e) = T$  – маємо суперечність із  $\Phi_\beta((d \cap {}^V A_\beta) \nabla x \rightarrow e) = F$ .

2. Показуємо  $M \models S^x(\Box \Phi, t) \rightarrow \Box S^x(\Phi, t)$ .

Припустимо супротивне: для деяких стану  $\alpha$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $(S^x(\Box \Phi, t) \rightarrow \Box S^x(\Phi, t))_\alpha(d) = F$ . Звідси  $(\Box S^x(\Phi, t))_\alpha(d) = F$  та  $(S^x(\Box \Phi, t))_\alpha(d) = T$ . Далі дослівно повторюємо доведення п.1, тільки істиннісні значення  $T$  та  $F$  міняються місцями.

Фактично доведення теореми 4 показує, що у випадку функціонально стабільної ТМС  $M$  для довільного стану  $\alpha$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $(\Box S^x(\Phi, \bar{t}))_\alpha(d) \equiv (S^x(\Box \Phi, \bar{t}))_\alpha(d)$ , що дає  $M \models \Box S^x(\Phi, t) \leftrightarrow S^x(\Box \Phi, t)$ .

Таким чином, умова функціональної стабільності ТМС дає змогу проносити символи суперпозиції через символи модальних композицій.

**Теорема 5.** Для кожної функціонально стабільної ТМС  $M$  для довільного стану  $\alpha$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $(t=s)_\alpha(d) \equiv (\Box t=s)_\alpha(d)$ .

Припустимо супротивне: існує функціонально стабільна ТМС  $M$  така, що для деяких  $\alpha$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $(t=s)_\alpha(d) \downarrow \neq (\Box t=s)_\alpha(d) \downarrow$ . Розглянемо можливі два випадки:

1)  $(t=s)_\alpha(d) = T$  та  $(\Box t=s)_\alpha(d) = F$ . Перше означає, що  $t_\alpha(d) \downarrow, s_\alpha(d) \downarrow, t_\alpha(d) = s_\alpha(d)$ . Із другої умови випливає, що для деякого  $\beta$  такого, що  $\alpha \triangleright \beta$ , маємо  $(t=s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = F$ . Звідси  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow \neq s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow$ . Згідно теореми 3 маємо  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\alpha(d), s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = s_\alpha(d)$ , звідки в силу  $t_\alpha(d) = s_\alpha(d)$  отримуємо  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = s_\beta(d \cap {}^V A_\beta)$  – суперечність;

2)  $(t=s)_\alpha(d) = F$  та  $(\Box t=s)_\alpha(d) = T$ . Перше означає, що  $t_\alpha(d) \downarrow, s_\alpha(d) \downarrow, t_\alpha(d) \neq s_\alpha(d)$ . Із другої умови випливає, що для всіх  $\beta$  таких, що  $\alpha \triangleright \beta$ , маємо  $(t=s)_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = T$ . Візьмемо довільний такий стан  $\beta$ , для нього маємо  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow = s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow$ . Але згідно теореми 3 маємо  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = t_\alpha(d), s_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = s_\alpha(d)$ , звідки в силу  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) = s_\beta(d \cap {}^V A_\beta)$  отримуємо  $t_\alpha(d) = s_\alpha(d)$  – суперечність.

**Наслідок.** Для функціонально стабільних ТМС маємо  $M \models t=s \leftrightarrow \Box t=s$ .

### 3. Темпоральні КНМС функціонально-екваційного рівня

Для ТмМС функціонально-екваційного рівня відповідним чином переформулюються твердження розділу 2. Зокрема, для таких ТмМС не можна проносити символи суперпозиції через символи модальних композицій. Тому будемо розглядати ТмМС функціонально-екваційного рівня із умовою збереження значень функціональних символів при русі за станами. Такі ТмМС назвемо функціонально стабільними. Умова функціональної стабільності вже дає змогу проносити символи суперпозиції через символи модальних композицій.

Для функціонально стабільних ТмМС справджуються аналоги теорем 3–5:

**Теорема 6.** Якщо ТмМС  $M$  функціонально стабільна, то для всіх  $\alpha \in S$ , для всіх  $\beta: \alpha \triangleright \beta$ , для всіх  $t \in Tr$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  з умови  $t_\alpha(d) \downarrow$  та  $t_\beta(d \cap {}^V A_\beta) \downarrow$  випливає  $t_\alpha(d) = t_\beta(d \cap {}^V A_\beta)$ .

**Теорема 7.** Для кожної функціонально стабільної ТмМС  $M$  маємо  $M \models \Box \uparrow S^\times(\Phi, \bar{t}) \rightarrow S^\times(\Box \uparrow \Phi, \bar{t}), M \models \Box \uparrow S^\times(\Phi, \bar{t}) \rightarrow S^\times(\Box \uparrow \Phi, \bar{t}),$  та  $M \models S^\times(\Box \downarrow \Phi, \bar{t}) \rightarrow \Box \downarrow S^\times(\Phi, \bar{t}), M \models S^\times(\Box \downarrow \Phi, \bar{t}) \rightarrow \Box \downarrow S^\times(\Phi, \bar{t}).$

**Теорема 8.** Для кожної функціонально стабільної ТмМС  $M$  для довільного стану  $\alpha$  та  $d \in {}^V A_\alpha$  маємо  $(t=s)_\alpha(d) \equiv (\Box \uparrow t=s)_\alpha(d)$  та  $(t=s)_\alpha(d) \equiv (\Box \downarrow t=s)_\alpha(d)$ .

**Наслідок.** Для функціонально стабільних ТмМС маємо  $M \models t=s \leftrightarrow \Box \uparrow t=s$  та  $M \models t=s \leftrightarrow \Box \downarrow t=s$ .

### Висновки

На основі інтегрованого інтенціонально-екстенціонального підходу до побудови логічних та програмних систем пропонуються та досліджуються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки функціонально-екваційного рівня. Для цих логік розглядається спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи, визначаються транзитивні та темпоральні модальні системи, вивчаються їх семантичні властивості.

1. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 528 с.
2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Інтенціонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем // Проблеми програмування. – 2007. – № 2. – С. 15–40.
3. Шкільняк О.С. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення // Наукові записки НаУКМА. Серія: Комп'ютерні науки. – 2008. – Т. 6. – С. 25–34.
4. Shkilnyak O.S. Composition nominative modal and temporal logics. – Proceedings of the 10th International Conference on Informatics "Informatics 2009". – Herlany, Slovakia, 2009. – P. 148–153.
5. Шкільняк О.С. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки номінативних рівнів. // Міжнар. конф. "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем". – ТАAPSD'2009. Тези доповідей. – К., 2009. – С. 100–107.
6. Шкільняк О.С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–24.